# 偏心している樹幹横断面の解析的研究

高　瀬　五　郎*

## Analytical Study of Biased Cross Section of stem

Gorō TAKASE

**Synopsis:** On the biased cross section of the stem, the fluctuation of the length of radius from the pith to the boundary of one annual ring can be expressed by Fourier's series.

$$y = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots\cdots + a_n \cos nx + \cdots\cdots$$
$$+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots\cdots + b_n \sin nx + \cdots\cdots$$

The round shape of the cross section can be expressed by Fourier's series of 6 terms (6 radii) in general, 8 terms (8 radii) in detail, 4 terms (4 radii) in rough.

From the above, the area of the cross section can be expressed by the following formula.

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} y_i^2 \, dx$$

When 12 radii are measured, the area can be expressed by the following formula.

$$A = \pi \left( \frac{1}{12} \sum_{i=0}^{11} y_i^2 - \frac{1}{2} a_6^2 \right)$$

As $\left(\frac{\pi}{2} a_6^2\right) / A$ is less than $10^{-5}$, we can neglect the term, $\left(\frac{1}{2} a_6^2\right)$, of the equation, and then obtain the following formula.

$$A = \frac{\pi}{12} \sum_{i=0}^{11} y_i^2$$

If we make use of 4 radii that we may calculate the area, the area calculated is smaller than the exact area by 0.1 % in average, and, if 3 groups of 4 radii are chosen the coefficient of variation is less than 2 % in general. From the fact above mentioned we can probably calculate the area of the cross section of the stem by the following formula.

$$A = \frac{\pi}{4} \sum_{i=0}^{3} y_i^2$$

---

*　演習林　助教授・本報の一部は1965年10月，日本林学会関西支部大会において講演した．

## 要　旨

### I　年輪界線の形状

髄心からある一つの年輪界に至る任意の半径を首線として，他の任意の半径の長さ ($y$) と，首線とのなす角 ($x$) との関係は，週期 $2\pi$ の単値週期関数であって，次の如きフーリエ級数で表わすことができる．

$$y = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots\cdots + a_n \cos nx + \cdots\cdots$$
$$+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots\cdots + b_n \sin nx + \cdots\cdots$$

スギ・アカマツあわせて４例で検定すると，偏心した樹幹横断面の形状は，一般的には上記フーリエ級数の６項（６半径），やや精密には８項（８半径），やや粗には４項（４半径）でほぼ表わしうることを知るのである．

### II　断　面　積

上記の如きフーリエ級数で表わしうる偏心した樹幹横断面の面積（A）は，次式で表わすことができる．

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} y_i^2 \, dx$$

１断面から12個の半径を測定したときにはその断面積は次式で表わすことができる．

$$A = \pi\left(\frac{1}{12}\sum_{i=0}^{11} y_i^2 - \frac{1}{2} a_6^2\right)$$

しかるに $\left(\frac{\pi}{2} a_6^2\right) / A$ は実験的には$10^{-5}$よりも小であるから，我々はこの項を無視して，

$$A = \frac{\pi}{12}\sum_{i=0}^{11} y_i^2$$

としてもさしつかえないであろう．

また，１断面から４半径を測定したときには，それから計算した面積は，12半径を測定して計算した面積よりも，平均して0.1％ほど小さい．１断面から４半径づつの組を３組選んで，それぞれ面積を求めたときには，その間の変動係数は一般に２％よりも少ない．以上述べたことから，断面積は，おそらくは次式で求めても大差はないであろう．

$$A = \frac{\pi}{4}\sum_{i=0}^{3} y_i^2$$


## は　じ　め　に

樹幹の横断面の形状はきわめて複雑であって，既知のいかなる幾何学的平面形にも一致しないとされている．しかし実用的見地から，その形状は多くの場合円とみなされており，時には長円とみなされているが，これら断面を精細に観察すると，それはかなり不整形で，あるものはむしろシモニー氏曲線形またはいわゆるタマゴ形に近いものがある．

一般にこれら対称図形もあるが，非対称図形も多い．

円形でない横断面ではもちろん，ほぼ円形に近い横断面ででも，多くの場合，いわゆる偏心なる現象が見られる．したがって，その髄心から一つの年輪界線に至る直線（以下これを半径と呼ぶ）の長さの変化の研究は，髄心の存在を無視した単なる横断面の形状についての研究に比して，はるかに複雑である．

この研究は髄心を中心として，樹幹横断面の形状を解析的に明らかにするとともに，あわせて断面積の計算方法について考究せんとするものである．

## 研　究　の　詳　細

### I　年輪界線の形状

髄心からある一つの年輪界に至る任意の半径を首線として，他の任意の半径の長さ ($y$) と，首線とのなす角 ($x$) との関係を図示すると，それは週期 $2\pi$ の単値週期関数であって，次のごときフーリエ級数で表わすことができる．

$$y=a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+\cdots+a_n\cos nx+\cdots$$
$$+b_1\sin x+b_2\sin 2x+\cdots+b_n\sin nx+\cdots \quad (1)$$

ここに $a_i$, $b_i$ はフーリエ係数である，($i=1,\ \cdots\cdots,\ n,\ \cdots\cdots$)

(1) 式を有限項で表わすことにして，その常数，$a_0$, $a_i$, $b_i$ を求める方法は成書[1),2)]に詳しい．

いま，髄心のまわりの角を12等分して，12個の半径値を測定した場合について述べる．この研究で実例として使用したものは，第1表に示した4個の円盤から得たものであるが，他に比較のため真円を1個示した．ただし髄心に相当する点は適宜偏心さして定めてある．

第　1　表

| 円盤記号 | 樹　種 | 年輪数 |
|---|---|---|
| A | アカマツ | 28 |
| B | スギ | 21 |
| C | スギ | 41 |
| D | スギ | 34 |
| E | 真円 | — |

第　2　表

| 円盤記号 | 実測計算別 | 0° | 30° | 60° | 90° | 120° | 150° | 180° | 210° | 240° | 270° | 300° | 330° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 実測値 | 90.3 | 81.6 | 67.2 | 55.4 | 48.6 | 45.1 | 45.1 | 47.5 | 51.6 | 58.6 | 70.6 | 83.8 |
| | 計算値 | 89.8 | 81.9 | 67.2 | 55.3 | 48.6 | 45.3 | 44.9 | 47.5 | 51.7 | 58.5 | 70.4 | 84.2 |
| B | 実測値 | 78.0 | 75.0 | 68.4 | 61.5 | 53.9 | 45.5 | 40.3 | 39.1 | 42.8 | 51.5 | 65.0 | 74.2 |
| | 計算値 | 78.0 | 74.7 | 68.6 | 61.6 | 53.6 | 45.7 | 40.3 | 39.0 | 42.7 | 51.9 | 64.4 | 74.6 |
| C | 実測値 | 139.9 | 131.2 | 110.4 | 94.0 | 87.7 | 83.1 | 86.8 | 88.9 | 95.5 | 102.0 | 113.0 | 134.2 |
| | 計算値 | 141.1 | 130.7 | 110.3 | 94.4 | 86.9 | 84.2 | 85.4 | 91.3 | 95.1 | 101.3 | 114.5 | 132.6 |
| D | 実測値 | 123.0 | 121.4 | 108.0 | 96.6 | 90.4 | 85.0 | 81.7 | 82.4 | 82.5 | 88.5 | 105.8 | 121.3 |
| | 計算値 | 125.3 | 119.4 | 108.4 | 97.6 | 89.4 | 84.8 | 82.9 | 81.5 | 82.1 | 89.7 | 105.2 | 120.2 |
| E | 実測値 | 30.00 | 28.03 | 23.03 | 17.32 | 13.03 | 10.71 | 10.00 | 10.71 | 13.03 | 17.32 | 23.03 | 28.03 |
| | 計算値 | 30.00 | 28.01 | 23.02 | 17.35 | 13.02 | 10.70 | 10.03 | 10.69 | 13.02 | 17.35 | 23.02 | 28.11 |

単位　$mm$，実測値の小数1位は目測による（ただしEを除く）．

これら4個の円盤と1個の真円の，髄心から外縁までの半径値の変化をフーリエ級数で表わすため，$x=0$ から $x=2\pi$ までの週期を12等分して半径値を測定し，各円盤別に示すと第2表の実測値欄のとおりである．

これらの数値を用いて，(1)式中の $a_0$, $a_1$, ……, $a_6$, $b_1$, ……, $b_5$ 等12個の常数を決定した．一括表示すると第3表のとおりである．

第　3　表

| 円盤記号 | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_0$ | 62.1167 | 57.9333 | 105.5583 | 98.8833 | 18.6845 |
| $a_1$ | 19.2575 | 13.9851 | 24.0244 | 16.8089 | 8.6601 |
| $a_2$ | 2.6417 | 2.2583 | 2.8417 | 3.6333 | 0.6693 |
| $a_3$ | 0.2333 | 0.4667 | 0.1333 | 0.9000 | 0. |
| $a_4$ | −0.1917 | −0.2083 | 0.2417 | 0.3167 | 0.012 |
| $a_5$ | −0.1409 | −0.1018 | 1.3923 | 0.4411 | 0. |
| $a_6$ | −0.1167 | −0.1333 | 0.0083 | 0.3167 | −0.0008 |
| $b_1$ | 8.9932 | 13.1082 | 9.7508 | 13.2066 | 4.9999 |
| $b_2$ | 4.5176 | 0.0722 | 7.2313 | 3.9260 | 1.1593 |
| $b_3$ | 1.2667 | 0.1667 | 2.1500 | 0.0667 | 0. |
| $b_4$ | 0.1588 | −0.2454 | 0.2742 | −1.4723 | −0.0208 |
| $b_5$ | 0.0734 | −0.1416 | −0.1508 | −0.3900 | 0. |

次に，

$$r_i = \sqrt{a_i^2+b_i^2}\,, \qquad \theta_i = \tan^{-1}\,(a_i/b_i) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

として，$r_i$, $\theta_i$ を一括表示すると第4表のとおりである．

第　4　表

| 円盤記号 | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| $r_1$ | 21.2539 | 19.1679 | 25.9278 | 21.3765 | 9.9999 |
| $r_2$ | 5.2333 | 2.2595 | 7.7696 | 5.3492 | 1.3387 |
| $r_3$ | 1.2880 | 0.4956 | 2.1541 | 0.9025 | 0. |
| $r_4$ | 0.2489 | 0.3219 | 0.3655 | 1.5060 | 0.0240 |
| $r_5$ | 0.1589 | 0.1744 | 1.4004 | 0.5888 | 0. |
| $r_6$ | −0.1167 | −0.1333 | 0.0083 | 0.3167 | −0.0008 |
| $\theta_1$ | 64°58′ | 46°51′ | 67°55′ | 51°51′ | 60° |
| $\theta_2$ | 30°19′ | 88°10′ | 21°27′ | 42°47′ | 30° |
| $\theta_3$ | 10°26′ | 70°21′ | 3°33′ | 85°46′ | |
| $\theta_4$ | 309°38′ | 220°20′ | 41°24′ | 167°52′ | 150° |
| $\theta_5$ | 297°31′ | 215°43′ | 96°11′ | 131°29′ | |

第4表の数値から次式を得る．

円 盤 A

$$y_i=62.1167+21.2539\sin(x_i+64°58')+5.2333\sin(2x_i+30°19')+1.2880\sin(3x_i+10°26')+0.2489\sin(4x_i+309°38')+0.1589\sin(5x_i+297°31')-0.1167\cos 6x_i$$

円 盤 B

$$y_i=57.9333+19.1679\sin(x_i+46°51')+2.2595\sin(2x_i+88°10')+0.4956\sin(3x_i+70°21')+0.3219\sin(4x_i+220°20')+0.1744\sin(5x_i+215°43')-0.1333\cos 6x_i$$

円 盤 C

$$y_i=105.5583+25.9278\sin(x_i+67°55')+7.7696\sin(2x_i+21°27')+2.1541\sin(3x_i+3°33')+0.3655\sin(4x_i+41°24')+1.4004\sin(5x_i+96°11')+0.0083\cos 6x_i$$

円 盤 D

$$y_i=98.8833+21.3765\sin(x_i+51°51')+5.3492\sin(2x_i+42°47')+0.9025\sin(3x_i+85°46')+1.5060\sin(4x_i+167°52')+0.5888\sin(5x_i+131°29')+0.3167\cos 6x_i$$

真 円 E

$$y_i=18.6845+9.9999\sin(x_i+60°00')+1.3387\sin(2x_i+30°00')+0.024\sin(4x_i+150°00')-0.0008\cos 6x_i$$

(3)

第4表に示した $r_i$ を F 分布によって検定[2]すると，第5表の結果を得た．

第 5 表

| 円盤記号 | $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ | $r_4$ | $r_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| A | $\alpha=0.01$で有意 | $\alpha=0.05$で有意 | $\alpha=0.20$で有意 | 有意でない | 有意でない |
| B | $\alpha=0.05$で有意 | $\alpha=0.20$で有意 | 有意でない | 有意でない | 有意でない |
| C | $\alpha=0.05$で有意 | $\alpha=0.05$で有意 | $\alpha=0.20$で有意 | 有意でない | 有意でない |
| D | $\alpha=0.05$で有意 | $\alpha=0.20$で有意 | 有意でない | 有意でない | 有意でない |
| E | $\alpha=0.01$で有意 | $\alpha=0.01$で有意 | — | $\alpha=0.20$で有意 | — |

第5表を見ると，$\alpha=0.05$ で有意なのは $r_2$ までで，$\alpha=0.20$ で有意なのは $r_3$ までである．わずか4例であるから，これから一般を推測することは危険ではあるが，髄心の位置を考慮に入れての樹幹横断面の形状は，フーリエ級数の第2調和項または第3調和項までで表わし得るのではあるまいかと考える．

(3) 式で計算した $y$ の値は，実測値と完全に一致することは当然であるが，参考のために，各式の第3調和項までを用いて算出した数値を第2表の計算値欄に掲げたが，ほぼ一致することがわかるであろう．実測値の小数第1位は目測値であることを付記しておく．

以上から考察すると，髄心の位置を考慮に入れての樹幹横断面の形状は，6個の半径，場合によっては8個または4個の半径を測定することによって，ほぼ表わしうることを知るのである．

## II 断面積の求め方

### 1 $n=12$ の場合

いま，各年輪界線の半径値の変化は (1) 式で表わしうることを述べた．しからば，積分学の教えるところにより，偏心した年輪界線で囲まれる面積 ($A$) は，

$$A=\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} y_i^2\,dx \quad \cdots\cdots (4)$$

である．(1) 式を (4) 式に代入して整理し，必要な12項に止めると次式をうる．

$$A=\pi\left[a_0^2+\frac{1}{2}\left(a_1^2+\cdots\cdots+a_6^2+b_1^2+\cdots\cdots+b_5^2\right)\right] \cdots\cdots (5)$$

(5) 式によって $A$ を求めるには，$a_0$, $a_1$, ……, $a_6$, $b_1$, ……, $b_5$ を求めねばならないが，この方法は，まず年輪界線の形状を明らかにし，あわせて，その面積を求めるのにはよいが，もし，断面積だけを求めたいのであれば回り遠い方法であるから，各半径値を求めただけで，直ちに面積を求める方法を考えなければならない．

$a_0$, $a_i$, $b_i$ を求めた公式を用いると，

$$(a_0^2+a_6^2)+\frac{1}{2}(a_1^2+\cdots\cdots+a_5^2+b_1^2+\cdots\cdots b_5^2)=\frac{1}{12}\sum_{i=0}^{11} y_i^2 \quad \cdots\cdots (6)$$

である．(6) 式と (5) 式とから，

$$A=\pi\left(\frac{1}{12}\sum_{i=0}^{11} y_i^2-\frac{1}{2}a_6^2\right) \quad \cdots\cdots (7)$$

であることがわかる．しかるに，

$$a_6^2=\frac{1}{144}\Big[(y_0+y_2+y_4+y_6+y_8+y_{10})-(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9+y_{11})\Big]^2 \cdots (8)$$

であるから，$y_i$ ($i=0$, ……, 11) を測定するだけで，比較的簡単に断面積 ($A$) を求めることができる．

さて，ここで問題となるのは $\frac{1}{2}a_6^2$ の大きさであるが，これは単値週期関数と (8) 式の性質から考えて，$\frac{1}{2}a_6^2$ の大きさは大したものにならないであろうことは想像に難くない．いま $n=12$ の場合，上記 $\frac{\pi}{2}a_6^2$ が $A$ に対する比率，すなわち $\left(\frac{\pi}{2}a_6^2\right)\Big/A$ を求めると，次のとおりである．

| | |
|---|---|
| 円盤Aの場合 | $1.661\times10^{-6}$ |
| 円盤Bの場合 | $2.508\times10^{-6}$ |
| 円盤Cの場合 | $2.992\times10^{-9}$ |

円盤Dの場合　$5.000\times10^{-6}$
真円Eの場合　$8.646\times10^{-10}$

この比率は大きくて100万分のいくらであるから，これを無視して，断面積は，

$$A=\left(\frac{\pi}{12}\sum_{0}^{11}y_i^2\right) \quad \cdots\cdots (9)$$

として大過ないことがわかるのである．

**2　$n=4$ の場合**

次に，$n=4$ の場合について考える．$n=4$ の場合には，髄心の周りの角を12等分するものとして，首線のとり方によって，一つの円盤ごとに，4直径の組を3組作ることが出来るから，$\left(\frac{\pi}{2}a_2^2\right)/A$ を一括表示すると，第6表のとおりである．

第　6　表

| 円盤記号 | 組番号 1 | 2 | 3 | 平均 |
|---|---|---|---|---|
| A | 0.003441 | 0.000753 | 0.000787 | 0.001660 |
| B | 0.000248 | 0.000202 | 0.000642 | 0.000364 |
| C | 0.002548 | 0.001033 | 0.000352 | 0.001311 |
| D | 0.001234 | 0.000177 | 0.000773 | 0.000728 |

第　7　表

| 円盤記号 | 面積偏差別 | 組番号 1 | 2 | 3 | 平均値 | 確値 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 面積 | 13064.31 | 12761.84 | 12740.79 | 12855.65 | 12877.14 |
| | 偏差 | +208.66 | −93.81 | −114.86 | −21.49 | |
| | 標準偏差 147.78，変動係数 1.15% | | | | | |
| B | 面積 | 11104.81 | 11216.40 | 11056.24 | 11125.82 | 11129.81 |
| | 偏差 | −21.00 | +90.58 | −69.58 | −3.99 | |
| | 標準偏差 67.04，変動係数 0.603% | | | | | |
| C | 面積 | 36307.73 | 35759.08 | 36291.21 | 36119.33 | 36166.77 |
| | 偏差 | +188.40 | 360.25 | +171.88 | −47.44 | |
| | 標準偏差 254.85，変動係数 0.705% | | | | | |
| D | 面積 | 30567.45 | 32112.04 | 31712.59 | 31464.02 | 31486.49 |
| | 偏差 | −896.57 | +648.02 | +248.57 | −22.47 | |
| | 標準偏差 654.61，変動係数 2.08% | | | | | |

各組の偏差は平均値からの偏差であって，平均値欄の偏差は確値からの偏差である．

すなわち $\left(\frac{1}{2}a_2^2\right)\Big/A$ は大きくとも1000分のいくらであって，平均して0.1%ぐらいであるから，$n$ は4でも $A \fallingdotseq \frac{\pi}{4}\sum_{i=0}^{3} y_i^2$ と考えて実用上支障はないであろう．

最後に，$n=12$ として求めた $A_{12}$ を正確な断面積とみなし，$n=4$ として求めた $A_4$ の誤差関係を一括表示すると第7表のとおりである．第7表から明らかなように，$n=4$ とした場合には，各円盤の首線のとりかたによる $A_4$ の平均値は正確な値よりわずかであるが小さいようである．また，首線のとり方による各円盤の $A_4$ の変動係数は，約2%より小であるから，首線の位置はどこにとっても大差がないようである．

3　真 円 の 場 合

ここに注目すべきことは，たとえ偏心していても，年輪界線が真円のときには，$n$ が 4, 6, 8, 12 等の場合には，幾何学的または三角法的に，$A=\frac{\pi}{4}\sum_{i=1}^{n} y_i^2$ であることが容易に証明出来ることである．前記の円盤Eの場合には，$A \neq \frac{\pi}{n}\sum_{i=0}^{n} y_i^2$ であったのは，有限項のフーリエ級数では円を完全には表わしえないことを意味しているのである．

偏心している真円の，髄心からの半径値（$y$, 円の半径とは異なる）の変化は次式で表わすことが出来る．

$$
\begin{aligned}
y &= b\cos x + \sqrt{b^2\cos^2 x + (r^2 - b^2)} \\
&= b\cos x + \sqrt{r^2 - b^2\sin^2 x}
\end{aligned}
$$

ここに，$r$ はその円の半径，$b$ は円の中心と髄心との距離である．

## む　す　び

以上を要するに，資料の範囲に限っていえば，樹幹横断面において，髄心からある一つの年輪界に至る任意の半径の長さは，特定の半径を首線とする週期 $2\pi$ のフーリエ級数で表わすことが出来る．しかして樹幹横断面の形状はフーリエ級数の調和第2項まででほぼ完全に表わすことが出来るが，精密を望めば調和第3項まで，概略ならば調和第1項までとればよいようである．換言すれば，等角にとった6個の半径でほぼ完全に，8個の半径でやや精密に，4個の半径でやや概略に横断面の形状を表わすことが出来る．

樹幹横断面の面積（$A$）は，

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} y_i^2\,dx$$

で表わすことが出来るが，12個の半径を測定すれば，

$$A=\pi\left(\frac{1}{12}\sum_{i=0}^{11} y_i^2 - \frac{1}{2}a_6^2\right)$$

で表わすことが出来る．いま，$\left(\frac{\pi}{2}a_6^2\right)\Big/A$ を見ると，それは100万分のいくらかであるから，これを無視して，

$$A = \frac{\pi}{12} \sum_{i=0}^{11} y_i^2$$

としてさしつかえがないものと思う．

4個の半径を求めた場合でも，その計算した断面積は正確な値に比して，平均して約0.1%小さく，また首線の位置のとり方によってもその変動係数は約2%以下である．

真円の場合には，たとえ偏心していても，半径数が4，6，8，12等の場合には，正確に，

$$A = \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

であることが容易に証明される．(1966年8月25日受理)

## 文　　献


1) 長沢武雄： 実験観測　計算法
2) 石川栄助： 実用近代統計学