

資料

本数密度の解析的研究[†]

高瀬五郎*

I はしがき

林分においては、林齢が増すにつれて個々の樹木が大となるために個体間の競争が生じ、劣者のあるものは自然枯死するか、または人為的に伐除せられて、そこに本数減少なる現象が生ずる。この現象は、単位面積の本数密度と、林分を構成する各林木要素の平均的大きさとの関係で表わすことができる。

本稿は、平均樹高、平均胸高直径以外に、平均樹冠長をとりあげ、本数密度とこれらとの関係を一貫した資料によって解析的に研究したものである。

本稿では、直角座標において、原点から放射状に分布する観測値に最小自乗法を適用した場合の係数、分散、相関係数を求める式を誘導して使用した。

II 資料

本稿の資料としては、植杉哲夫氏が「岩手地方赤松林の成長収穫並びに施業法に関する研究」¹⁾のために収集せられた標準地の数値を、同氏の御承諾を戴いて借用した。多数の収穫表調製業務資料の中から、特に同書を選んだ理由は、同書の標準地総括表には平均枝下高の測定値が記載せられているからである。記して深甚なる謝意を表わす次第である。

本稿では、同書の第5表、標準値総括表に記されている数値のうち、主林木の部分だけを用いた。それは、主林木の部分の数値は、寺崎B種の間伐を施したものであるから、樹冠疎密度は、一応一定であると考え得るからである。

同表には143標準地の数値が記されているが、本稿では平均樹高が1.2m(胸高)以下のものを棄て、残り139標準地を使用した。

本稿では、本数密度(N)を次式を用いて、平均樹幹距離(R)に換算して表わすこととした。

$$R = \sqrt{\frac{4}{\pi} \cdot \frac{10000}{N}} \quad N: \text{ha 当たり立木本数}$$

すなわち、Rはその林分で、各単木の平均占有面積と等しい円の直径を表わしている。

III 研究の詳細

1. 平均樹幹距離(R)と、林分構成因子との関係

平均樹幹距離は、林齢が変化するにつれて変化し、その変化の仕方は地位が異なるにつれて異なるものであろうが、ここでは林齢と地位とを無視して、まず、平均樹高、平均胸高直径、平均樹冠長と平均樹幹距離との関係を調べることとする。

1) 平均樹幹距離と平均樹高との関係

上記資料を用いて、平均樹幹距離(R)と平均樹高(\bar{H})との関係を図示すると第1図のとおりであって、観測値はほぼ原点から放射状に分布していることがわかるのである。この事実から筆者は

$$R = \beta \bar{H}$$

† Gorō TAKASE: Analysis of Stand Density

* 附属演習林 助教授

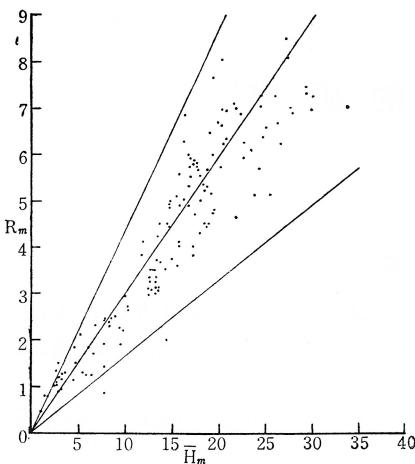


Fig. 1 The relation between R and \bar{H}

を仮定する。ただし \bar{H} には誤差なく、 R にだけ誤差があるものとする。いま w_i が R_i の重みを表わすものとすれば、最小自乗法によって偏差平方和 (S) は

$$S = \sum w_i (R_i - b\bar{H}_i)^2,$$

であり、

$$b = \frac{\sum w_i R_i \bar{H}_i}{\sum w_i \bar{H}_i^2} \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

であることは周知のことである。つぎに w_i について考察しよう。 w_i と \bar{H}_i との関係についてはつぎの三つの場合についてのみ考察する²⁾。

- i w_i がすべて等しい。
- ii w_i が \bar{H}_i に反比例する。
- iii w_i が \bar{H}_i^2 に反比例する。

i の場合を考えると、第1図の R_i は原点から放射状に分布していて、 R_i がすべて同じ重みを持っているとは考えられない。

したがって

$$b = \frac{\sum R_i \bar{H}_i}{\sum \bar{H}_i^2}$$

とすることは適当ではない。つぎに、ii で w_i が \bar{H}_i に反比例するとは R_i の標準誤差の平方が \bar{H}_i に比例することであり、iii で w_i が \bar{H}_i^2 に反比例するとは、 R_i の標準誤差の平方が \bar{H}_i^2 に比例するということである。この ii と iii を第1図について比較すると、もちろん観測値であるから判然とはしないが、ii よりも iii の方が事実によりよく合致するように考えられる。

iii を採用し、 $w_i = \frac{1}{\bar{H}_i^2}$ を仮定すれば、(1) 式は

$$b = \frac{1}{n} \sum \frac{R_i}{\bar{H}_i}$$

となる。ここに $\sum \frac{\bar{H}_i}{\bar{H}_i} = 41.36$, $n=139$ であるから、 $b=0.297554$ となり、

$$R = 0.297554 \bar{H} \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

となる。つぎに β の信頼限界を求める。

$$S^2_{R \cdot \bar{H}} = [\sum w_i (R_i - b\bar{H}_i)^2] / (n-1) \quad \dots \dots \dots \quad (3)$$

は周知である。3 式に $w_i = \frac{1}{\bar{H}_i^2}$ を代入すると、

$$S^2_{R \cdot \bar{H}} = \left[\sum \left(\frac{R_i}{\bar{H}_i} \right)^2 - \frac{1}{n} \left(\sum \frac{R_i}{\bar{H}_i} \right)^2 \right] / (n-1)$$

一方、

$$t = \frac{(b-\beta) \sqrt{\sum w_i \bar{H}_i^2}}{s_{R \cdot \bar{H}}}$$

に、 $w_i = \frac{1}{\bar{H}_i^2}$ を代入すると、 $t = \frac{b-\beta}{s_{R \cdot \bar{H}}} \sqrt{n}$ は自由度 $n-1$ の t 分布にしたがい、 β に対する $(1-\alpha)$ の信頼係数での信頼区間は、

$$b - t_0 \frac{s_{R \cdot \bar{H}}}{\sqrt{n}} < R < b + t_0 \frac{s_{R \cdot \bar{H}}}{\sqrt{n}}$$

ここで t_0 は危険率、 α での自由度 $(n-1)$ の t の値である。しかして $\sum \left(\frac{R_i}{\bar{H}_i} \right)^2 = 12.9400$ であるから、 $s_{R \cdot \bar{H}} =$

$0.004588, s=0.067736, \alpha=0.05$ で、 $V=n-1=138$ のとき $t_0=1.980$,
 $\therefore 0.2862 < \beta < 0.3089$ を得る。なお R_i / \bar{H}_i と \bar{H}_i との関係を第2図に示したが、同図からも iii の仮定がほぼ妥当なことがわかると思う。

2) 平均樹幹距離と平均樹冠長との関係

平均樹高 (\bar{H}) と平均枝下高 (\bar{h}) との差を平均樹冠長 ($\bar{H}-\bar{h}$) とし、これと平均樹幹距離 (R) との関係を資料について図示すると第3図のとおりであって、1) の場合と同じく、ほぼ原点から放射状に分布していることがわかる。故に

$$R = \beta' (\bar{H} - \bar{h})$$

を仮定し、なお R_i の重み (w_i) は $(\bar{H}-\bar{h})$ の2乗に反比例するものとすれば、

$$\begin{aligned} b' &= \frac{1}{n} \sum \frac{R_i}{(\bar{H}_i - \bar{h}_i)} \\ S^2_{R \cdot (\bar{H}-\bar{h})} &= \left[\sum \left(\frac{R_i}{\bar{H}_i - \bar{h}_i} \right)^2 - \frac{1}{n} \left(\sum \frac{R_i}{\bar{H}_i - \bar{h}_i} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

を得る。資料から $\sum \frac{R}{\bar{H}-\bar{h}} = 98.39$, $\sum \left(\frac{R}{\bar{H}-\bar{h}} \right)^2 = 72.1675$ であるから、 $b'=0.7078$ となり、

$$R = 0.7078 (\bar{H} - \bar{h}) \quad \dots \quad (4)$$

を得、 $s^2=0.018282$, $s=0.135212$, 故に β' に対する 95% 信頼区間は $0.4301 < \beta' < 0.9755$ となる。

3) 平均樹幹距離と平均胸高直径との関係

資料について、平均胸高直径 (\bar{D}) と平均樹幹距離 (R) との関係を図示すると第4図のとおりであって、ほぼ放射状に分布していることは前2者と同様であるが、この場合その回帰直線は原点を通らないことを知るのである。その理由は、前2者では \bar{H} または $(\bar{H}-\bar{h})$ が零に近づき、それが零になれば、当然 R も零となるはずであるが、平均胸高直径の場合には、 \bar{D} が零に近づき、それが零となっても、なおかつ樹冠はあるから、 R は零とならないはずであるからである。いま

$$R = p + q \bar{D}$$

を仮定し、常数を平均法で求めると、

$$R = 0.726355 + 0.161215 \bar{D}$$

を得る。この式で $\bar{D}=0$ ならば $R=0.7264$, $R=0$ ならば $\bar{D}=-4.5055$ となる。故に $\bar{D}=-4.5$ のところに原点を移せば、図上の観測値は、新原点から、ほぼ放射状に分布していることを知るのである。故に前2者と同様にして

$$R = \beta'' (\bar{D} + 4.5)$$

$$b'' = \frac{1}{n} \sum \frac{R}{\bar{D} + 4.5}$$

$$S^2_{R \cdot (\bar{D}+4.5)} = \left[\sum \left(\frac{R}{\bar{D} + 4.5} \right)^2 - \frac{1}{n} \left(\sum \frac{R}{\bar{D} + 4.5} \right)^2 \right]$$

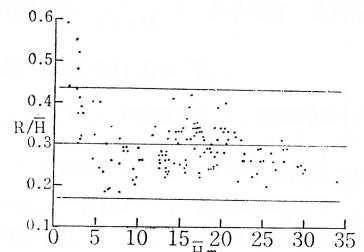


Fig. 2 The relation between R/\bar{H} and \bar{H}

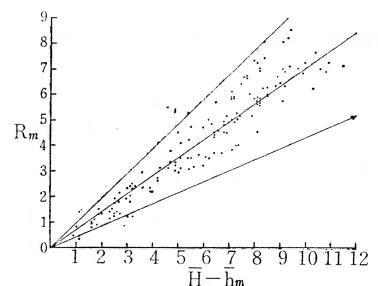


Fig. 3 The relation between R and $(\bar{H}-\bar{h})$

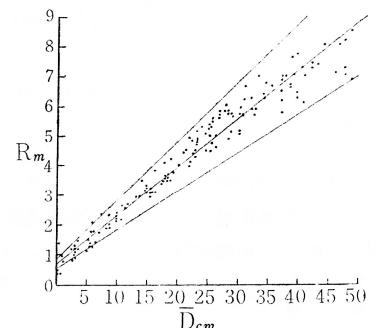


Fig. 4 The relation between R and \bar{D}

を得る。資料から $\Sigma \frac{R}{D+4.5} = 22.38$, $\Sigma \left(\frac{R}{D+4.5} \right)^2 = 3.6416$, 故に
 $b'' = 0.161007$, $R = 0.161007 (\bar{D} + 4.5)$ (5)

$s^2 = 0.000277$, $s = 0.016650$, β に対する 95% の信頼区間は $0.1280 < \beta'' < 0.1940$ を得る。

4) 本数そのもので表わした密度式について

平均樹幹距離と平均樹高または平均胸高直径との間に直線的関係があることは上述したが、このことは古く記載があるといふ³⁾。しかし平均樹幹距離と平均樹冠長との間に直線的関係があることは、他に記載があることを聞かない。

上述のように、平均樹幹距離とこれら三要素それぞれとの間にはほぼ直線的関係があるとすれば、実用的にはなはだ便利である。いまかりに、平均樹幹距離と、平均胸高直径との間に、直線的関係があるものとして、本数密度 (N) と平均胸高直径との関係を求むれば、 $R = \sqrt{\frac{4}{\pi} \frac{10000}{N}}$ であるから、

$$N = \frac{1}{(D+4.5)^2}$$

(K : 常数) となる。本式を一般化して

$$N = \frac{1}{p + qD + rD^2}$$

とすれば事実をよりよく表わすことができるであろう。この式は周知の $N = aD^b$ 式のように、 D が零に近い部分での不合理もない。同様にして、

$$N = \frac{1}{qH + rH^2},$$

$$N = \frac{1}{q(H-h) + r(H-h)^2}$$

を得る。

5) 平均樹幹距離と三要素との相関の比較

平均樹幹距離と三要素との相関係数を求めよう。まず観測値が原点から放射状に分布する場合の 1 例として、 R と H との相関係数を求める。 R の H に対する回帰係数を $b_{H \cdot R}$ とする。しかばん前述のように、 $b_{H \cdot R} = \frac{1}{n} \sum \frac{R_i}{H_i}$ であり、 $b_{R \cdot H}$ は $b_{R \cdot H} = \frac{\sum w_i R_i H_i}{\sum w_i R_i^2}$ である。 $w_i = \frac{1}{H^2}$ を仮定しているから、これを上式に代

入すると $b_{R \cdot H} = \frac{\sum \frac{R}{H}}{\sum \left(\frac{R}{H} \right)^2}$ を得る。しかるに統計学上 $r = \sqrt{b_{H \cdot R} \times b_{R \cdot H}}$ は周知のことであるから、これに

$b_{H \cdot R}$, $b_{R \cdot H}$ を代入して整理すると、 $r = \sqrt{\frac{\left(\sum \frac{R}{H} \right)^2}{n \sum \left(\frac{R}{H} \right)^2}}$ を得る。1) で述べたように、 $\sum \left(\frac{R}{H} \right)^2 = 12.94$,

$\sum \frac{R}{H} = 41.36$ であるから、 $r = 0.9752$ を得る。すなわち H と R とは相当高度の相関関係があり、この場合 r は決して負となることはない。同様にして次式を得る。

$$\sum \left(\frac{R}{H} \right)^2 = 12.9400 \quad \sum \frac{R}{H} = 41.36 \quad \therefore r_{R \cdot H} = 0.9752 \quad \dots \quad (a)$$

$$\sum \left(\frac{R}{D+4.5} \right)^2 = 3.6416 \quad \sum \frac{R}{D+4.5} = 22.38 \quad \therefore r_{R \cdot (\bar{D}+4.5)} = 0.9947 \quad \dots \quad (b)$$

$$\sum \left(\frac{R}{H-h} \right)^2 = 72.1675 \quad \sum \frac{R}{H-h} = 98.39 \quad \therefore r_{R \cdot (\bar{H}-\bar{h})} = 0.9824 \quad \dots \quad (c)$$

すなわち、平均樹幹距離 (R) と、三要素、 $(\bar{H}, \bar{D}, \bar{H}-\bar{h})$ との間の相関関係はいずれも高く、その差はわずかであるが、 b, c, a の順になっている。

2. 本数密度に関する若干の考察

1) 平均樹幹距離と平均樹冠長との関係

いま、ある樹冠を、その幹軸を含む平面で切断すれば、大略第5図のごときものを得るであろう。ここに AF は樹高、 CF は枝下高であって、したがって AC は樹冠長である。故に、樹冠の形状は DB/AC で表わすことも一方法である。

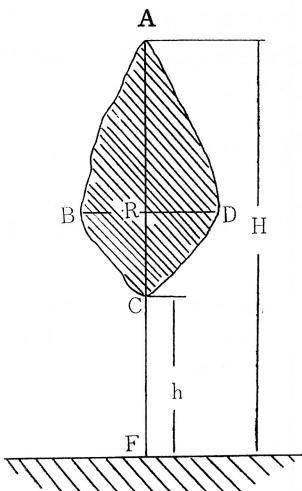


Fig. 5 A longitudinal of a tree

この考え方のもとに、各標準地ごとに、直角座標の横軸に $(\bar{H}-\bar{h})$ 、縦軸に $R/(\bar{H}-\bar{h})$ をとって図示すれば第6図のとおりで、 $\frac{R}{\bar{H}-\bar{h}}$ は樹冠長に無関係ではほぼ一定のようである。しかし第6図においては $\frac{R}{\bar{H}-\bar{h}} = K$ は相当の幅で散布している。

樹冠の形状は、換言すれば K は、林齡に関係があるであろうことは想像に難くない。林齡と K との関係を図示して第7図を得た。図から K は林齡 (A) に関係があることがわかるので、 $K=a+b \cdot A$ を仮定し、最小自乗法で常数を求め次式を得た。あわせて分散分析表を掲げる。

$$K = 0.60555 + 0.000222 A$$

回	帰	平 方 和	自由 度	不 偏 分 散	分 散 比
常	數 項	69.6445	1		
回	歸 項	0.5964	1	0.5964	44.73
残	り	1.8266	137	0.013333	
	総	72.0675	139		

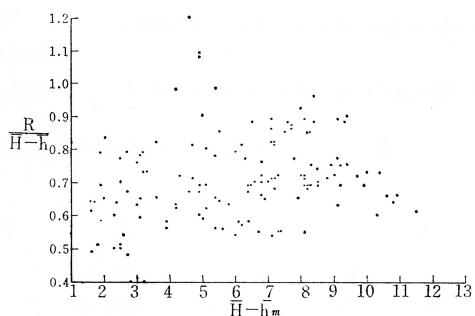


Fig. 6 The relation between $R/(\bar{H}-\bar{h})$ and $(\bar{H}-\bar{h})$

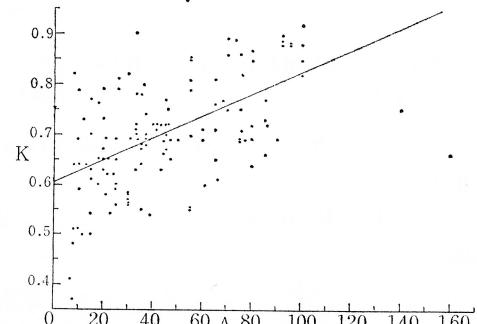


Fig. 7 The relation between $K[R/(\bar{H}-\bar{h})]$ and A (years of age)

以上から、 K は幼齢林から漸次壮齢林、老齢林へと移るにしたがい、わずかづつではあるが、順次に大となることを知るのであって、このことは漸次樹冠が偏平となるか、またはうつ閉度が疎となることを意味する。

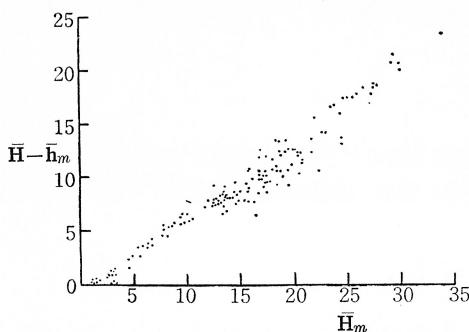


Fig. 8 The relation between $\bar{H} - \bar{h}_m$ and \bar{H}

2) 平均樹冠長と平均樹高との関係

平均樹冠長と平均樹高との関係を図示すると第8図のとおりであって、その相関関係は相当高度である。資料によれば $\sum \frac{\bar{H} - \bar{h}}{\bar{H}} = 60.71$ $\sum \left(\frac{\bar{H} - \bar{h}}{\bar{H}} \right)^2 = 29.3173$ であるから、前記相関係数算出公式によって $r_{\bar{H}, (\bar{H} - \bar{h})} = 0.9510$ である。

3) 本数密度と平均胸高直径との関係

筆者はアカマツの平均胸高直径について、平均樹高と平均樹冠長との重回帰を仮定し、資料を用い最小自乗法で常数を求め、次式を得た。

$$D = -6.06522 + 1.02463 \bar{H} + 2.14551 (\bar{H} - \bar{h}) \quad \dots \dots \dots \quad (6)$$

変因	平方和	自由度	不偏分散	分散比
常数項	71081.54	1		
\bar{H} の項	20699.86	1	20699.86	1703.57
$\bar{H} - \bar{h}$ の項	819.05	1	819.05	67.41
残り	1652.52	136	12.15088	
総	94252.97	139		

すなわち、平均胸高直径は、平均樹高および平均樹冠長から求め得ることがわかる。

すなわち、(5)式の D に (6)式を代入すれば、

$$R = -0.2520 + 0.16497 \bar{H} + 0.34544 (\bar{H} - \bar{h}) \quad \dots \dots \dots \quad (7)$$

を得る。

一方、 R は \bar{H} 、 $\bar{H} - \bar{h}$ から直接求めることができる。すなわち、 $s = \sum w_i (R_i - b\bar{H}_i - c(\bar{H}_i - \bar{h}_i)^2)$ とすれば

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2b \sum w_i \bar{H}_i^2 - 2 \sum w_i R_i \bar{H}_i + 2c \sum w_i \bar{H}_i (\bar{H}_i - \bar{h}_i) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial C} = 2c \sum w_i (\bar{H}_i - \bar{h}_i)^2 - 2 \sum w_i R_i (\bar{H}_i - \bar{h}_i) + 2b \sum w_i \bar{H}_i (\bar{H}_i - \bar{h}_i) = 0$$

故に、 $w_i = \frac{1}{\bar{H}_i (\bar{H}_i - \bar{h}_i)}$ を仮定すれば

$$\begin{cases} \sum \frac{R}{\bar{H}_i - \bar{h}_i} = b \sum \frac{\bar{H}_i}{\bar{H}_i - \bar{h}_i} + cn \\ \sum \frac{R}{\bar{H}_i} = bn + c \sum \frac{\bar{H}_i - \bar{h}_i}{\bar{H}_i} \end{cases}$$

$$b = \frac{\sum \frac{R}{\bar{H} - \bar{h}} \sum \frac{\bar{H} - \bar{h}}{\bar{H}} - n \sum \frac{R}{\bar{H}}}{\sum \frac{\bar{H} - \bar{h}}{\bar{H}} \sum \frac{\bar{H}}{\bar{H} - \bar{h}} - n^2}$$

$$c = \frac{\sum \frac{R}{\bar{H}} \sum \frac{\bar{H}}{\bar{H} - \bar{h}} - n \sum \frac{R}{\bar{H} - \bar{h}}}{\sum \frac{\bar{H} - \bar{h}}{\bar{H}} \sum \frac{\bar{H}}{\bar{H} - \bar{h}} - n^2}$$

資料によって、 $\Sigma \frac{\bar{H}}{\bar{H}-\bar{h}} = 342.82$ であるから、すでに求めた $\Sigma \frac{R}{H}$, $\Sigma \frac{\bar{H}-\bar{h}}{\bar{H}}$, $\Sigma \frac{\bar{H}}{\bar{H}-\bar{h}}$, n を上式に代入して計算すれば、 $b=0.150320$, $c=0.337104$, すなわち

$$R = 0.150320 \bar{H} + 0.337104 (\bar{H} - \bar{h}) \quad \dots \dots \dots \quad (8)$$

を得る。すなわち(7)式、(8)式はほとんど一致する。試みに R と \bar{H} , $(\bar{H} - \bar{h})$ との重相関係数を求めるところ $r_{R \cdot \bar{H}} = 0.9754$, $r_{R \cdot (\bar{H} - \bar{h})} = 0.9824$, $r_{\bar{H} \cdot (\bar{H} - \bar{h})} = 0.9510$ であるから、 $r_{R \cdot \bar{H}, (\bar{H} - \bar{h})} = 0.9914$ を得る。この値は $r_{R \cdot (\bar{D}+4.5)} = 0.9947$ とほぼ等しい。

IV おわりに

筆者はながらく一つの疑問を持っていた。それは、いわゆる Wimmenauer の法則と称して、1 林分の平均胸高直径と、単位面積当たりの生立本数との間に、きわめて高度の相関関係があるといわれているが、なぜそうなのだろうかということである。

きわめて素朴な観察ではあるが、1 林分で平均胸高直径が増大したからといって、それが原因で間伐が行なわれたり、自然枯死したりするわけのものではなく、また、間伐や自然枯死で生立本数が減少したからといって、それが原因で直ちに残存木の胸高直径が増大するわけのものではない。この二つの間には、決して直接の因果関係はありそうに思えない。ものである。

林齢が増せば、まず現われることは各樹冠が大きくなるということである。ということは、樹高が高くなり、各枝条が伸び、下枝が枯れ落ち、結果、樹冠がその高さでも、幅でも大きくなることである。もちろん、樹冠の質の変化も考えられる。

このように、樹冠が大きくなるということのために、いわゆる生存競争が生じ、その結果、劣者は自然枯死するか、または伐除せられ、単位面積当たりの生存本数が減少するのである。故に端的にいえば、本数の減少は、樹冠が大となるためである。もちろん根系の競合、その他いろいろの原因もあるが、今は地上部に限って考えることとする。

この場合の樹冠の大小は、樹冠の幅が最も大切であるが、この幅を多数測定した資料がない。幸い、幅のかわりに平均樹冠長を求めうる現在の資料を見いだしたのである。そこで筆者は、平均樹冠長と平均樹冠幅との間には、きわめて高度の相関関係の存在が予想されるので、樹冠幅のかわりに樹冠長を採用し、以後各種の考察をしていったわけである。

平均樹幹距離と、平均樹高・平均胸高直径・平均樹冠長との間の相関係数を求める

$$r_{R \cdot \bar{H}} = 0.9752 \quad r_{R \cdot (\bar{D}+4.5)} = 0.9947 \quad r_{R \cdot (\bar{H} - \bar{h})} = 0.9834$$

で、三者の間の差はわずかではあるが、 $r_{R \cdot (\bar{D}+4.5)}$ が最大である。なぜだろう、その理由を考えてみたかったのである。

筆者はかって、スギ・ヒノキの単木において、その胸高直径は、その樹高と樹冠長とから求めうることを知った⁴⁾。それで筆者は、アカマツの林分の平均胸高直径を、平均樹高、平均樹冠長とから求め得るやいなやを調べて、(6)式を得たのである。すなわち、平均胸高直径は、平均樹高と、平均樹冠長から求めうることを知ったのである。すなわち、平均胸高直径は、平均樹高と、平均樹冠長との総合成果であるとも言えよう。

また一方筆者は、 $r_{R \cdot \bar{H}}$ と $r_{R \cdot (\bar{H} - \bar{h})}$ とから重相関係数 $r_{R \cdot \bar{H}, (\bar{D}+4.5)}$ を求めて 0.9914 を得た。この値は $r_{R \cdot (\bar{D}+4.5)}$ とほとんど等しいことを知るのである。

以上から考えて、平均胸高直径と平均樹幹距離との間の相関関係が高いのは、平均樹高と平均樹冠長との総合成果としての平均胸高直径と、平均樹幹距離との間の相関関係が高いからであると考えられないであろうか。

ここでお断りしておきたいことは、筆者は決して、平均胸高直径に代わるべきものを探しているのではない。本数密度は、平均樹高と平均樹冠長とから推定すべきだ、などと言うつもりは毛頭ない。筆者は、本数密度は平均胸高直径から推定するのが、もっとも簡単で有効であると考えることは、他の人と同じである。筆者の考えたかったことは、この項のはじめに戻り、なぜ Wimmenauer の法則が成り立つかということを、少しでも解明したかったのであるが、このことは本論文ではその目的を十分に達し得ず、さらに後日に待ちたい。したがって、この項に書いたことは結論ではないのが残念である。

引　用　文　献

- 1) 植杉哲夫： 収穫表調製業務研究資料，第1号，24～31，林野庁，1952
- 2) デミング著，森口繁一訳： 推計学によるデータのまとめ方，22～23，岩波書店，1950
- 3) 只木良也・四手井綱英： 京都大学農学部附属演習林報告，第34号，2～3，1963
- 4) 高瀬五郎： 日林誌，33，251～257，1951

(1968年10月7日受理)